NEAPRĖŽTAI DALŪS TIKIMYBINIAI DĖSNIAI

Kursinis darbas

Mindaugas Indriūnas

Patvirtino:

____

A. Bikelis, darbo vadovas

Vytauto Didžiojo universitetas
Kaunas, Lietuva

2009 m. gruodžio 14 d.

Įvadas

Matematinėje statistikoje bei Lévy procesų teorijoje dažnai sutinkame parametrizuotus tikimybinius skirstinius ir jų galimus ryšius, tačiau pasigendame jų klasifikavimo pagal neaprėžtą dalumą.

Savo darbe pasinaudosime L.M. Leemis ir J.T. McQuestion straipsniu "Univariate Distribution Relationships", Amer. Stat. Ass., 2008, Vol. 62, No. 1, 45-53, kuriame yra gana ilgas sąrašas statistikoje naudojamų skirstinių ir lentelė nurodanti jų sąryšius (priedas Nr. 1). Pagal galimybes iš sąrašo išskirsime neaprėžtai dalius (jų klasę žymėsime ID) ir tuos, kurie liks už klasės ID ribų. Jeigu skirstinys bus neaprėžtai dalus, tai pateiksmie jų Lévy-Chinčino, Kolmogorovo ir šiandien tikimybių teorijoje dažnai vartojamą kanoninę išraišką.

Greta šių klausimų mus domina sekantis:

tarkime $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ yra neprėžtai dalus atsitiktinis vektorius (koordinatės gali būti priklausomos), kokioms Borelio funkcijoms $g(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, atsitiktinis dydis $\eta = g(\vec{\xi})$ yra neaprėžtai dalus.

Į minėto straipsnio sąrašą nepateko tikimybiniai skirstiniai naudojami finansų matematikoje. Pavyzdžiui, skirstiniai iš W. Schoutens knygos "Lévy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives, 2003, John Wiley & Sons, Ltd." Antrame priede iš šios knygos pateikiame neaprėžtai dalių skirstinių lentelę su jų kanoninėmis išraiškomis.

Paskutinis klausimas, kurį norėtume nors iš dalies paliesti yra sekantis:

tarkime tikimybinis skirstinys $G(x; \alpha, \beta, ..., \gamma)$ priklauso klasei ID ir $\tau > 0$, tuomet sąsūka

$$G^{*\tau}(x; \alpha, \beta, ..., \gamma)$$

taip pat priklauso ID. Reikia rasti parametrus $\alpha = \alpha(\tau), \beta = \beta(\tau), ..., \gamma = \gamma(\tau)$ tokius, kad būtų lygybė

$$G^{\star\tau}(x; \alpha, \beta, ..., \gamma) = G^{\star 1}(x; \alpha(\tau), \beta(\tau), ..., \gamma(\tau)),$$

visiems $x \in \mathbb{R}^1$.

Toliau pateiksime apibrėžimus ir tvirtinimus reikalingus minėtų uždavinių sprendimams.

§ 1. ID klasė

Atsitiktintis dydis ξ būtų vadinamas vieną kartą *daliu*, jei jis galėtų būti parašytas kaip dviejų nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

kur ξ_1 ir ξ_2 atsitiktinių dydžių tikimybiniai dėsniai yra tokie patys.

Atsiktinis dydis ξ vadinamas *neaprėžtai daliu*, jei kiekvienam $n \geqslant 1$ jis gali būti užrašytas kaip n nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma.

Neaprėžtaus dalumo sąlygą paprasčiau galima suformuluoti charakteringųjų funkcijų kalba.

Jei $f(t)$ yra atsitiktinio dydžio ξ charakteringa funkcija, tai sakome, kad ji yra vieną kartą *dali* jei ji gali būti parašyta dviejų charakteringų funkcijų sandauga

$$f(t) = f_1(t) f_2(t),$$

kur $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ yra neišsigimusių skirstinių charakteringos funkcijos; ir vadinama *neaprėžtai dalia*, jei kiekvienam $n \geqslant 1$ ji gali būti parašyta lygybe

$$f(t) = (f_n(t))^n,$$

kai $f_n(t)$ yra visiems sumos

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

dėmenims būdingo dėsnio charakteringoji funkcija.

Vadinasi, $f(t)$ yra be galo dali jei

$$f(t) = (f(t))^{1/n}.$$

Prieš parodant, kad kai kurios charakteringosios funkcijos nėra neaprėžtai dalios, parodysime, kad kai kurios jų *yra* neaprėžtai dalios.

Imkime normalinius pasiskirstymo dėsnius. Jų charakteringoji funkcija yra tokios formos:

$$f(x) = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2t^2}\right\}$$

kur μ yra vidurkis, σ - standartinis nuokrypis.

Tuomet vienodai normaliai pasiskirsčiusių n dėmenų charakteringoji funkcija:

$$f_n(t) = (f(t))^{1/n} = \exp\left\{i\frac{\mu}{n}t - \frac{\sigma^2}{2n}t^2\right\} = \exp\left\{i\frac{\mu}{n}t - \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}t^2\right\}$$

Dešiniajame lygybių krašte yra normalinio atsitiktinio dydžio su vidurkiu $\frac{\mu}{n}$ ir standartiniu nuokrypiu $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ charakteringoji funkcija. Tai yra teisinga visiems n, todėl pagal normalinį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis yra neaprėžtai dalus.

Kad pamatytume, jog ne visi atsitiktiniai dydžiai yra neaprėžtai dalūs, užtenka pasižiūrėti į diskrečiuosius atsitiktinius dydžius, kurie įgyja tik dvi skirtingas (atskiras) reikšmes, sakykime b_1 ir b_2.

Kad šis atsitiktinis dydis būtų neaprėžtai dalus, jis turi būti bent jau vieną kartą dalus, t.y., užrašomas kaip dviejų nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusų atsitiktinių dydžių suma.

Tarkime, kad toks skirstinys egzistuoja. Jei atsitiktinis dydis galėtų įgyti tik vieną reikšmę, tai nebūtų įmanoma gauti dviejų reikšmių b_1 ir b_2. Tarkime, kad kintamieji gali įgyti po dvi reikšmes, tarkim a_1 ir a_2. Tuomet galimos tokių kintamųjų sumos yra "a_1 ir a_1", "a_1 ir a_2", ir "a_2 ir a_2". Tai neleidžia tokių kintamųjų sumai įgyti tiksliai dviejų reikšmių b_1 ir b_2. Todėl atsitiktinis dydis įgyjantis dvi ir tik dvi skirtingas reikšmes negali būti daliu, ir tuo labiau negali būti neaprėžtai daliu.

Atsitiktinis dydis, kuris gali įgyti tik tris skirtingas reikšmes, dalus irgi būti negali, bet dėl kitokios priežasties nei viršuje minėta.

Sakykime, kad atstiktinis dydis gali įgyti tris skirtingas reikšmes b_1, b_2 ir b_3 su tikimybėmis atitinkamai p_1, p_2 ir p_3, kur $p_1+p_2+p_3 = 1$. Jei šis atsitiktinis dydis būtų užrašytas kaip dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių, kurie įgyja reikšmes a_1 ir a_2 su atitinkamomis tikimybėmis p ir q, suma, tai dviejų tokių kintamųjų sumos galimos reikšmės būtų $2a_1$, a_1+a_2, $2a_2$. Tokios a_1 ir b_1 reikšmės, kad

$$2a_1 = b_1$$
$$a_1 + a_2 = b_2$$
$$2a_2 = b_3$$

gali būti surastos tik tada ir tik tada, kai $b_2 = (b_1 + b_3)$. Tarkime, kad taip ir yra. Tuomet reikšmių $2a_1$, $a_1 + a_2$ ir $2a_2$ tikimybės yra atitinkamai: p^2, $2pq$ ir q^2. Sąlygos

$$p^2 = p_1$$
$$2pq = p_2$$
$$q^2 = p_3$$

gali būti patenkintos tik tada, kai $p_2 = 2(p_1p_3)^{\frac{1}{2}}$.

Bet kuris trireikšmis atsitiktinis dydis, kuriam tai nėra teisinga, negali būti daliu, juo labiau neaprėžtai daliu. Galima parodyti, kad bet kuris neišsigimęs atsitiktinis dydis su baigtine kitimo sritimi negali būti neaprėžtai dalus. Todėl bendru atveju, diskretūs atsitiktiniai dydžiai negali būti neaprėžtai dalūs.

Neaprėžto dalumo sąlygos gali būti ekvivalenčiai ir patogiau užrašytos charakteringų funkcijų logaritmais:

$$\log(f_n(t)) = \frac{\log(f(t))}{n}$$

Kelių neaprėžtai dalių atsitikinių dydžių klasių pavyzdžiai:

Klasė	Charakteristinės funkcijos $f(t)$ logaritmas	$\frac{\log(f(t))}{n}$
Normalusis	$i\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2$	$i\frac{\mu}{n}t - \frac{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2}{2}t^2$
Puasono	$\lambda(e^{it} - 1)$	$\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)$
Koši	$i\mu t - a\|t\|$	$i\frac{\mu}{n}t - \frac{a}{n}\|t\|$

Neaprėžtai dalių dėsnių charakteringų funkcijų kanoniniai išdėstymai

Neaprėžtai dalaus atsitiktinio dydžio charakteringos funkcijos logaritmas gali būti užrašytas sekančiomis formulėmis:

Lévi ir Chinčino formulė

$$\log f(t) = it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2} \right) \frac{1 + x^2}{x^2} d\nu(x),$$

čia $\gamma \in \mathbb{R}$, o $\nu(x)$ yra nemažėjanti aprėžta funkcija tenkinanti sąlygą $\nu(-\infty) = 0$. Pointegralinė funkcija dėl tolydumo apibrėžta visiems $x = 0$, ir lygi $-(t^2/2)$.

Pastaba: Jei $\nu(x)$ nėra aprėžta nemažėjanti funkcija, bet yra baigtinės variacijos funkcija, tai šia forma apibrėžta charakteringa funkcija $f(t)$ nėra neaprėžtai dali.

Lévi formulė

$$\log f(t) = itb - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u) \quad + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u),$$

čia $M(u)$, $N(u)$ ir σ^2 tenkina sekančias sąlygas:

i $M(u)$ ir $N(u)$ yra nemažėjančios kiekviename iš intervalų $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

ii $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$

iii Integralai $\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM(u)$ ir $\int_{0}^{\epsilon} u^2 dN(u)$ yra baigtiniai kiekvienam $\epsilon > 0$.

iv Konsanta σ^2 yra reali ir neneigiama.

Kolmogorovo formulė

$$\log f(t) = itc + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1 - itx)\frac{dK(x)}{x^2},$$

čia $c \in \mathbb{R}$, o $K(u)$ yra nemažėjanti baigtinės variacijos funkcija tenkinanti sąlygą $K(-\infty) = 0$.

Užrašymas šiomis kaoninėmis formomis yra vienintelis, ir yra galimas tada ir tik tada, kai funkcija $f(t)$ yra neaprėžtai dalaus atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija [2].

Kanoninių išdėstymų lentelę pateikiame antrame priede.

Teorema 1. Tarkime $f(t)$ yra be galo dali charakteringa funkcija, kurią galima išskaidyti į dvi be galo dalias komponentes $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Tuomet $f(t)$ ir $f_1(t)$ apibrėžia funkciją $f_2(t)$ vienareikšmiškai.

Ši teorema, pateikta [2] (122 psl.), kad charakteringų funkcijų sandaugai galioja prastinimo veiksmas analogiškas skaičių sandaugų prastinimo veiksmui tuomet, jei tik prastiname iš be galo dalios komponentės.

Įdomu, kad tai nėra vienintelis galimas būdas be galo dalią charakteringą funkciją išskaidyti į komponentes: be galo dalios charakteringos funkcijos gali turėti daugiklius, kurie patys nėra be galo dalios funkcijos.

Pavyzdys Tarkime a ir b yra du teigiami realūs skaičiai, ir $v = a + ib$. Tuomet galima parodyti, kad funkcija

$$f(t) = \frac{[1 + (it/v)][1 + (it/\overline{v})]}{[1 - (it/a)][1 - (it/v)][1 - (it/\overline{v})]}$$

yra charakteringoji funkcija ($\star$) jeigu

$$b \geqslant 2a\sqrt{a}$$

Tuomet $f(-t)$ taip pat yra charakteringa funkcija, kaip ir

$$g(t) = f(t)f(-t) = |f(t)|^2 = \frac{1}{1 + (t^2/a^2)}.$$

Tačiau pagal [2] knygos 8.4.1 teoremą, $f(t)$, o tuo pačiu ir $f(-t)$ nėra be galo dalios.

($\star$) Tam parodyti reikia skleisti $f(t)$ į dalines trupmenas ir suskaičiuoti $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt$ integruojant skleidinį panariui. Nesunku parodyti, kad gaunamas reiškinys neneigiamas jei lygybė $b \geqslant 2a\sqrt{a}$ yra tenkinama.

Tai, kad neaprėžtai dalus dėsnis gali turėti neskaidžią komponentė, ir skaidinys išlaiko šią savybę kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, pavyko parodyti konkrečiu atveju.

Teorema. Charakteringą funkciją $f(t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q}{2m-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} \left(e^{it(2m-1)} - 1\right)\right\}$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ galime išskaidyti į sandaugą charakteringų funkcijų $g_1(t) = p + qe^{it}$ ir $g_2(t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{q}{p}\right)^{2m} (e^{2itm} - 1)\right\}$, kurių viena yra neskaidi, o kita yra neaprėžtai dali:

$$f^{\frac{1}{n}}(t) = g_1^{\frac{1}{n}}(t) \cdot g_2^{\frac{1}{n}}(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

$\bigtriangledown$

Iš teoremos sąlygos seka, kad

$$f^{\frac{1}{n}}(t) = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} \left(e^{it(2m-1)} - 1\right)\right\}$$

$$g_1^{\frac{1}{n}}(t) = \left(p + qe^{it}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$g_2^{\frac{1}{n}}(t) = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m}\left(e^{2itm}-1\right)\right\};$$

Tarkime, kad egzistuoja tokia $g_n(t) := p_n + q_n e^{it}$, $p_n + q_n \equiv 1, p_n > 0, q_n > 0$ kad

$$g_1^{\frac{1}{n}}(t) \underset{t}{\equiv} g_n(t),$$

ir tokia $g_{2n}(t) := \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{m}\left(e^{itm}-1\right)\right\}$, $a_m(n) > 0$, kad šios funkcijos tenkina sąryšį:

$$f^{\frac{1}{n}}(t) \underset{t}{\equiv} g_n(t) \cdot g_{2n}(t).$$

Tuomet šį sąryšį galime užsirašyti taip:

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1}\left(e^{it(2m-1)}-1\right)\right\} \equiv \left(p_n + q_n e^{it}\right)\cdot\exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{m}\left(e^{itm}-1\right)\right\}$$

Išlogaritmavę turime:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1}\left(e^{it(2m-1)}-1\right) \equiv \ln\left(p_n + q_n e^{it}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{m}\left(e^{itm}-1\right)$$

Išskleidžiame logaritmą eilute:

$$\ln\left(p_n + q_n e^{it}\right) = \ln\, p_n + \ln\left(1 + \frac{q_n}{p_n}e^{it}\right) = \ln\, p_n + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m e^{itm}$$

Įsistatę gautą reiškinį atgal į tapatybę turime:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1}\left(e^{it(2m-1)}-1\right) \equiv \ln p_n + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m e^{itm} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{m}\left(e^{itm}-1\right)$$

Surinkę laisvuosius narius, narius prie lyginių sumos narių, ir narius prie nelyginių sumos narių, sudarome sistemą:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} & = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{m} + \ln\, p_n \\ a_{2m}(n) & = \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} \\ a_{2m-1}(n) & = \frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} - \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1} \end{cases}$$

Šios sistemos pirmos lygties narį $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(n)}{m}$ užsirašę kaip lyginių bei nelyginių narių sumų sumą $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}(n)}{2m} \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m-1}(n)}{2m-1} \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1}$, ir vietoje šioje sumoje gautų narių $a_{2m}(n)$ bei $a_{2m-1}(n)$ įsistatę jų išraiškas iš lygčių sistemos antros ir trečios lygčių, turime:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} \underset{n}{\equiv} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} - \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1}\right) + \ln p_n$$

Atliekame skaičiavimus:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} \underset{n}{\equiv} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1} + \ln p_n$$

suprastiname vienodus narius skirtingose lygybės pusėse,

$$0 \underset{n}{\equiv} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1} + \ln p_n$$

minuso ženklą prieš narį įsikeliame po sumos ženklu,

$$0 \underset{n}{\equiv} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{2m-1}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{2m-1} + \ln p_n$$

apjungiame dvi sumas į vieną,

$$0 \underset{n}{\equiv} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{m} + \ln p_n$$

pritaikome logaritmo $\ln(1+x)$ eilutę, kai $-1 < x \leqslant 1$,

$$0 \underset{n}{\equiv} \ln\left(1 + \frac{q_n}{p_n}\right) + \ln p_n$$

$$0 \underset{n}{\equiv} \ln\left(\frac{p_n + q_n}{p_n}\right) + \ln p_n.$$

panaudojame teoremos sąlygą $p_n + q_n = 1$,

$$0 \underset{n}{\equiv} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) + \ln p_n$$

pritaikę logaritmo savybę gauname, kad galioja tapatybė:

$$0 \underset{n}{\equiv} -\ln p_n + \ln p_n,$$

kuri ir įrodo faktą.

Kai $a_m(n) > 0$, $0 < p_n < 1$, $0 < q_n < 1$, kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ turime charakteringos funkcijos $f(t)$ netrivialų išskaidymą į neaprėžtai dalią ir nedalią komponentę.

$\triangle$

Priedas 1

Priedas 2

Papildomi dėsniai iš Wim Schoutens „Lévy Processes in Finance"

$$\log f(t) = \mathrm{i}\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \mathrm{i}tx 1_{\{|x|<1\}}\right) \nu(dx),$$

čia $\sigma^2 = 0$ visais atvejais išskyrus Gauso dėsnio atvejį, kai σ lygi dispersijai.

Kelių dėsnių (3, 8, 13, 14) kaoninių išdėstymų nepateikta, nes jų nebuvo leidinyje [2].

Kelių dėsnių (7, 15, 16) kanoniuose išdėstymuose nenurodyta konstanta γ, nes ji nebuvo nurodyta leidinyje [2].

1. **Puasono dėsnis** $\xi \sim Poisson(\lambda)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $f(t) = \exp\left\{\lambda(e^{\mathrm{i}t} - 1)\right\}, \lambda > 0$

   - **Levi-Chinčino forma**

     $\gamma = \lambda/2$; [2] knygoje: $\gamma = 0$

     $\nu(x) = (\lambda/2) \in (x-1)$; [2] knygoje: $\nu(x) = \lambda\delta(1)$

   - **Levi forma**

     $b = \lambda/2$

     $\sigma = 0$

     $M(u) = 0$, kai $u < 0$

     $N(u) = \lambda \in (u-1)$, kai $u > 0$

   - **Kolmogorovo forma**

     $c = \lambda$

     $K(x) = \lambda \in (x-1)$

---

2. **Gama dėsnis** $\xi \sim Gamma(\lambda, \theta)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $f(t) = (1 - it/\theta)^{-\lambda},\ \theta > 0, \lambda > 0$

   - **Levi-Chinčino forma**

$\gamma = \lambda\int_0^\infty \frac{e^{-\theta y}}{1+y^2}dy$; [2] knygoje pateikta: $\gamma = \frac{a(1-e^{-b})}{b}$, $a=\lambda, b=\theta$

$\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{x} < 0 \\ \lambda\int_0^x \frac{ye^{-\theta y}}{1+y^2}dy, & \text{x} > 0 \end{cases}$; [2] knygoje pateikta: $\nu(dx) = a\exp(-bx)x^{-1}1_{(x>0)}\mathrm{d}x$

- **Levi forma**

  $b = \lambda\int_0^\infty \frac{e^{-\theta y}}{1+y^2}dy$

  $\sigma = 0$

  $M(u) = 0$, kai $u < 0$

  $N(u) = -\lambda\int_u^\infty \frac{e^{-\theta x}}{x}dx$, kai $u > 0$

- **Kolmogorovo forma**

  $c = \lambda/\theta$

  $K(x) = \begin{cases} 0, & \text{x} < 0 \\ \lambda\int_0^x ye^{-\theta y}dy, & \text{x} > 0 \end{cases}$

---

3. **Eksponentinis dėsnis** $\xi \sim Exp(\lambda)$

- **Charakteringoji funkcija**

  $f(t) = (1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda})^{-1}$

---

4. **Dėsnis** $\xi \sim IG(a,b)$

- **Charakteringoji funkcija**

  $f(t) = \exp\left\{-a(\sqrt{-2\mathrm{i}t + b^2} - b)\right\}$

- **Levi-Chinčino forma**

  $\gamma = (a/b)(2N(b)-1)$

  $\nu(x) = (2\pi)^{-1/2}ax^{-3/2}e^{\frac{-b^2x}{2}}1_{(x>0)}\mathrm{d}x$

---

5. **Dėsnis** $\xi \sim GIG(\lambda, a, b)$

- **Charakteringoji funkcija**

  $f(t) = K_\lambda^{-1}(ab)\left(1 - \frac{2\mathrm{i}t}{b^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} K_\lambda(ab\sqrt{1-\frac{2\mathrm{i}t}{b^2}})$

- **Levi-Chinčino forma**

  $\gamma = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}b^2x\right) \times \left(\int_0^\infty \frac{\exp(-xz)}{\pi^2 z(J^2_{|\lambda|}(a\sqrt{2z}) + N^2_{|\lambda|}(a\sqrt{2z}))}dz + \max\{0,\lambda\}\right)dx$

$$\nu(x) = x^{-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}b^2x\right)\times\left(\int_0^\infty \frac{\exp(-xz)}{\pi^2 z(J^2_{|\lambda|}(a\sqrt{2z})+N^2_{|\lambda|}(a\sqrt{2z}))}dz + \max\{0,\lambda\}\right) 1_{(x>0)}dx$$

---

6. **Dėsnis** $\xi \sim TS(\kappa, a, b)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $$f(t) = \exp\left\{ab - a(b^{1/\kappa} - 2\mathrm{i}t)^\kappa\right\}$$

   - **Levi-Chinčino forma**

     $$\gamma = a2^\kappa \tfrac{\kappa}{\Gamma(1-\kappa)} \int_0^1 x^{-\kappa}\exp(-\tfrac{1}{2}b^1\kappa)$$
     $$\nu(x) = a2^\kappa \tfrac{\kappa}{\Gamma(1-\kappa)} x^{-\kappa-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}b^{1/\kappa}x\right) 1_{(x>0)}\mathrm{d}x$$

---

7. **Gauso dėsnis** $\xi \sim Normal(\mu, \sigma^2)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $$f(t) = \exp\left\{\mathrm{i}t\mu - \tfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

   - **Levi-Chinčino forma**

     $$\gamma = 0$$
     $$\nu(x) =?$$

---

8. **Dėsnis** $\xi \sim VG(\sigma, \nu, \theta)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $$f(t) = \left(1 - \mathrm{i}t\theta\nu + \tfrac{\sigma^2\nu t^2}{2}\right)^{-1/\nu}$$

---

9. **Dėsnis** $\xi \sim VG(C, G, M)$

   - **Charakteringoji funkcija**

     $$f(t) = \left(\tfrac{GM}{GM+(M-G)\mathrm{i}t+t^2}\right)^C$$

   - **Levi-Chinčino forma**

     $$\gamma = C(MG)^{-1}\left(G\left(e^{-M}-1\right) - M\left(e^{-G}-1\right)\right)$$
     $$\nu(x) = C|x|^{-1}(e^{Gx}1_{x<0} + e^{-Mx}1_{x>0})\mathrm{d}x$$

---

10. **Dėsnis** $\xi \sim NIG(\alpha, \beta, \delta)$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \exp\left\{-\delta\left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \mathrm{i}t)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\right\}$$

- **Levi-Chinčino forma**

$$\gamma = \tfrac{2\delta\alpha}{\pi}\int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\alpha x)\mathrm{d}x$$
$$\nu(x) = \delta\alpha\pi^{-1}|x|^{-1}e^{\beta x}K_1(\alpha|x|)\mathrm{d}x$$

---

11. **Dėsnis** $\xi \sim CGMY(C, G, M, Y)$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \exp\left\{C\Gamma(-Y)((M - \mathrm{i}t)^Y - M^Y + (G + \mathrm{i}t)^Y - G^Y)\right\}$$

- **Levi-Chinčino forma**

$$\gamma = C\left(\int_0^1 \left(e^{-Mx} - e^{-Gx}\right) x^{-Y} dx\right)$$
$$\nu(x) = C|x|^{-1-Y}\left(e^{Gx}1_{(x<0)} + e^{-Mx}1_{(x>0)}\right)\mathrm{d}x$$

---

12. **Dėsnis** $\xi \sim Meixner(\alpha, \beta, \delta)$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \left(\cos(\tfrac{\beta}{2})/\cosh\left(\tfrac{\alpha t - \mathrm{i}\beta}{2}\right)\right)^{2\delta}$$

- **Levi-Chinčino forma**

$$\gamma = \alpha\delta\tan(\beta/2) - 2\delta\int_1^\infty \tfrac{\sinh(\beta x/\alpha)}{\sinh(\pi x/\alpha)}\mathrm{d}x$$
$$\nu(x) = \delta x^{-1}e^{\beta x/\alpha}\sinh^{-1}(\pi x/\alpha)\mathrm{d}x$$

---

13. **Dėsnis** $\xi \sim GZ(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta)$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \left(\tfrac{B(\beta_1 - \mathrm{i}\alpha t/2\pi, \beta_2 - \mathrm{i}\alpha t/2\pi)}{B(\beta_1, \beta_2)}\right)^{2\delta}$$

---

14. **Dėsnis** $\xi \sim HYP(\alpha, \beta, \delta)$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2}\right)^{1/2} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2})}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}$$

---

15. **Dėsnis** $\xi \sim GH(\lambda,\alpha,\beta,\delta), \lambda \geqslant 0$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2}\right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}$$

- **Levi-Chinčino forma**

$\gamma = ?$

$$\nu(x) = \frac{e^{\beta x}}{|x|}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2y+\alpha^2}}}{\pi^2 y\left(J_\lambda^2(\delta\sqrt{2y}+N_\lambda^2(\delta\sqrt{2y})\right)}dy + \lambda e^{-\alpha|x|}\right)$$

---

16. **Dėsnis** $\xi \sim GH(\lambda,\alpha,\beta,\delta), \lambda < 0$

- **Charakteringoji funkcija**

$$f(t) = \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2}\right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+\mathrm{i}t)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}$$

- **Levi-Chinčino forma**

$\gamma = ?$

$$\nu(x) = \frac{e^{\beta x}}{|x|}\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2y+\alpha^2}}}{\pi^2 y\left(J_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y}+N_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y})\right)}dy$$

NAUDOTA LITERATŪRA

[1] L.M. Leemis ir J.T. McQuestion "Univariate Distribution Relationships", Amer. Stat. Ass., 2008, Vol. 62, No. 1, 45-53

[2] Lévy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives, 2003, John Wiley & Sons, Ltd.

[3] J. Kubilius, Ribinės teoremos, 2009, http://www.mif.vu.lt/katedros/ttsk/bylos/ku/files/rte.html

[4] E. Lukacs, Characteristic functions, 2nd ed., Griffin, 1970, SBN 85264 170 2

[5] A. DasGupta, A. Bose and H. Rubin, Sankhya: A Contemporary Review and Bibliography of Infinitely Divisible Distributions, 2002, Ser. A, 3, 763-819.

[6] Thayer Watkins: Infinitely Divisible Random Variables and Their Characteristic Functions, http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/infdiv.htm